MINISTERE DE L'EQUIPEMENT,
DU LOGEMENT, DE L'AMENAGEMENT
DU TERRITOIRE ET DES TRANSPORTS

E.I.T.P.E. 1988

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES
(temps accordé : 2 heures)

NOTATIONS. Soit n un entier naturel non nul.
$M_n(C)$ est l'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes, à éléments complexes.

REMARQUE. A condition d'admettre le résultat de la question 5), on peut traiter la question 7).

Soit $A \in M_n(C)$, A non nulle, de valeurs propres non toutes nulles $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ avec $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \ldots \leq |\alpha_n|$; soit $\alpha = \sup_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$.

Il existe une matrice inversible Q appartenant à $M_n(C)$ telle que $Q^{-1}AQ$ soit triangulaire, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des éléments de la diagonale.

On appelle polynôme caractéristique de A : $P(X) = Det(XI_n - A)$, I_n étant la matrice unité d'ordre n ; on convient de noter $A^0 = I_n$.

On appelle trace d'une matrice M de $M_n(C)$ la somme des éléments de sa diagonale ; on la note Tr(M). On rappelle que deux matrices semblables ont même trace.

On définit les suites $(A_k)_{k \in N^*}$, $(B_k)_{k \in N^*}$, $(a_k)_{k \in N^*}$ par :

$$A_1 = A \qquad a_k = \frac{1}{k}(Tr(A_k)) \qquad B_k = A_k - a_k I_n \qquad A_{k+1} = B_k A$$

On pose par ailleurs $t_k = Tr(A^k)$.

QUESTION 1 Montrer que pour tout $k \geq 1$, $B_k = A^k - \sum_{i=1}^{k} a_i A^{k-i}$

QUESTION 2 On se propose de déterminer le rayon de convergence R de la série de terme général $t_k z^k$. A cet effet :

a) montrer que $R \geq \frac{1}{\alpha}$;

b) montrer que R est égal à $\frac{1}{\alpha}$: pour cela, examiner ce qui se passerait pour la série et sa somme dans un voisinage convenable d'un point d'affixe $\frac{1}{\alpha_j}$ (pour lequel $|\alpha_j| = \alpha$) si on supposait ce rayon supérieur à $\frac{1}{\alpha}$.

QUESTION 3

a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{P'(X)}{P(X)}$ où P'(X) désigne le polynôme dérivé de P(X).

b) Soit $z \in C^*$, $|z| < \frac{1}{\alpha}$, montrer l'égalité : $\frac{P'(1/z)}{zP(1/z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} t_k z^k$

QUESTION 4

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i X^{n-i}$ $(c_0 = 1)$ le polynôme caractéristique de A.

a) Déterminer les polynômes $X^n P(1/X)$ et $X^{n-1} P'(1/X)$

b) En utilisant alors la question 3b), montrer que pour $j \in N$, $1 \leq j \leq n$: $jc_j = -\sum_{i=0}^{j-1} c_i t_{j-i}$

QUESTION 5

Montrer alors pour $j \in N$, $1 \leq j \leq n$, que $c_j = -a_j$ (on pourra raisonner par récurrence) ; en déduire a_n en fonction du déterminant de A. Ainsi est prouvée l'égalité : $P(X) = X^n - a_1 X^{n-1} - a_2 X^{n-2} - \ldots - a_n$.

QUESTION 6

En admettant dans cette question seulement le théorème de Cayley-Hamilton c'est à dire : $A^n - a_1 A^{n-1} - a_2 A^{n-2} - \ldots - a_{n-1} A - a_n I_n = 0$ (matrice nulle), exprimer l'inverse de A lorsque A est inversible en fonction de B_{n-1}.

QUESTION 7 : EXEMPLE

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

a) Calculer $a_1, a_2, a_3, a_4, A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$.

b) Quel est le polynôme caractéristique de A et la matrice inverse de A.

c) Indiquer sans calculs une valeur propre de A et un vecteur propre associé.

d) Déterminer toutes les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.

• • •
•

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail